2) $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\text{Lnt}]_x^{2x} = \text{Ln}2$

3) $F(x) - \text{Ln}2 = \int_x^{2x} f(t)\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

$= \int_x^{2x} (f(t) - \frac{1}{t})\,dt = \int_x^{2x} \frac{\text{Lnt}}{t.h(t)}\,dt$

$x \geq 1$

Pour $t \in [x, 2x]$

$h(t) \geq h(x)$ car h est croissante sur

$[1, +\infty[\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(x)}$ et

$0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ et $0 \leq \text{Lnt} \leq \text{Ln}(2x)$

D'où $0 \leq \frac{\text{Lnt}}{th(t)} \leq \frac{\text{Ln}(2x)}{xh(x)}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Lnt}}{t.h(t)}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\text{Ln}(2x)}{xh(x)} dt$

$\Rightarrow 0 \leq F(x) - \text{Ln}2 \leq \frac{\text{Ln}(2x)}{h(x)}$

$\Rightarrow * \quad 0 \leq F(x) - \text{Ln}2 \leq \frac{\text{Ln}(2x)}{x - \text{Ln}x}$

Pour $x \geq 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Ln}(2x)}{x - \text{Ln}x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\text{Ln}2}{x} + \frac{\text{Ln}x}{x}}{1 - \frac{\text{Ln}x}{x}} = 0$ d'où :

$\lim_{x \to +\infty} (F(x) - \text{Ln}2) = 0$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \text{Ln}2$

4) a)

$F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - \text{Lnt}}\,dt$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow \text{Lnt} \leq 0$

$\Rightarrow -\text{Lnt} \geq 0$

$\Rightarrow t - \text{Lnt} \geq t$

$\Rightarrow \frac{1}{t - \text{Lnt}} \leq \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - \text{Lnt}}\,dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t} dt$

$\Rightarrow F(\frac{1}{2}) \leq [\text{Lnt}]_{\frac{1}{2}}^{1} \Rightarrow F(\frac{1}{2}) \leq \text{Ln}2$

b) on a :

$F(\frac{1}{2}) \leq \text{Ln}2$ et $F(1) \geq \text{Ln}(2)$ d'après 3)

F est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$

Ln2 est compris entre $F(\frac{1}{2})$ et $F(1)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ tels que $F(\alpha) = \text{Ln}2$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn